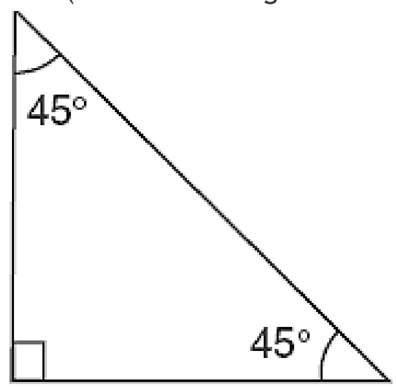
Unidad: Triángulo rectángulo

Lección: Triángulos especiales

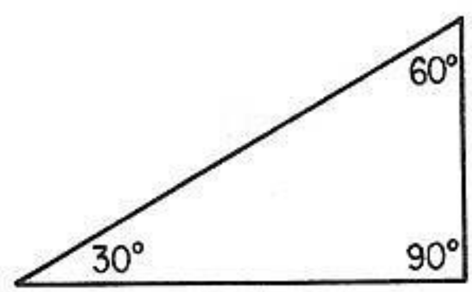
Introducción

Existen dos tipos de triángulos rectos especiales:

1) Los triángulos rectos isósceles (llamados triángulos 45°-45°-90°)



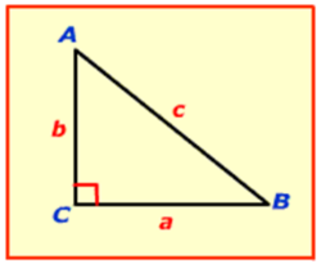
2) Los triángulos resultantes después de cortar a la mitad un triángulo equilátero. (llamados triángulos 30º-60º-90º)



Teorema relacionado con los triángulos 45º-45º-90º

Enunciado:

En un triángulo recto isósceles, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$ más larga que la longitud de cada cateto o sea, es el resultado de la multiplicación de la medida de uno de los dos catetos por $\sqrt{2}$.



a=b

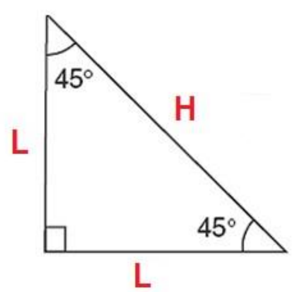
$c = a \cdot \sqrt{2}$ y $c = b \cdot \sqrt{2}$ ya que a=b.

Por lo tanto,

a = b por ser un triángulo isósceles

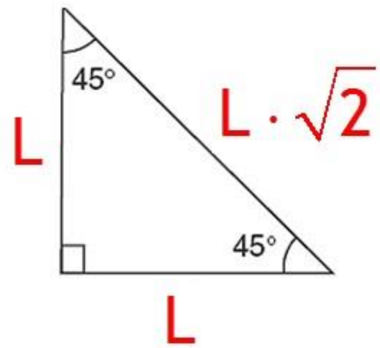
Demostración:

Si llamamos **L** a los catetos iguales y **H** a la hipotenusa y aplicamos el teorema de Pitágoras:



$$H^2 = L^2 + L^2 \Rightarrow H^2 = 2 \cdot L^2 \Rightarrow H = \sqrt{2 \cdot L^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{L^2} \Rightarrow \boxed{H = \sqrt{2} \cdot L}$$

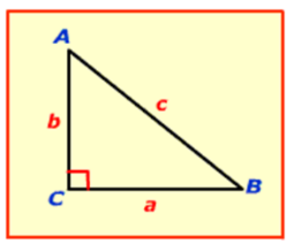
En resumen, queda demostrado que:



Ejemplo 1:

Si a = b = 7 unidades, entonces, ¿cuánto mide la hipotenusa?

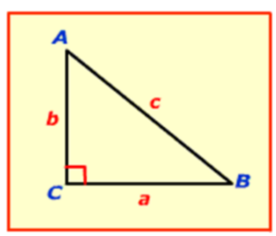
$$c = a \cdot \sqrt{2} \Rightarrow c = 7 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow c = 7\sqrt{2}$$



Ejemplo 2:

Si a = 4 unidades, entonces, ¿cuánto mide el otro cateto y la hipotenusa?

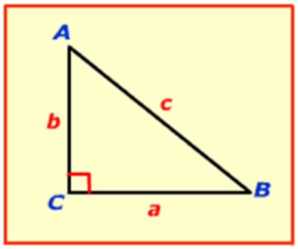
$$a = b = 4 \Rightarrow c = a \cdot \sqrt{2} \Rightarrow c = 4\sqrt{2}$$



Ejemplo 3:

Si un cateto mide 3, la hipotenusa mide ______.

$$c = a \cdot \sqrt{2} \Rightarrow c = 3\sqrt{2}$$



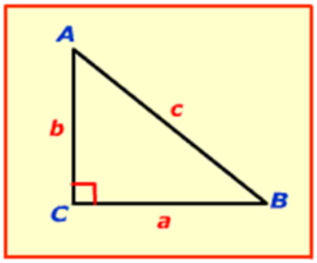
Ejemplo 4:

Si la hipotenusa mide $3\sqrt{6}$, los catetos medirán ______.

$$c = a \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{2}} = a$$

$$a = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{12}}{\sqrt{2^2}} = \frac{3\left(\cancel{2}\sqrt{3}\right)}{\cancel{2}} = 3\sqrt{3}$$

$$a = b = 3\sqrt{3}$$



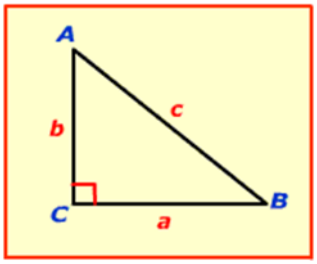
Ejemplo 5:

Si la hipotenusa mide $7\sqrt{10}$, los catetos medirán ______.

$$c = a \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{2}} = a$$

$$a = \frac{7\sqrt{10}}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = 7\sqrt{5}$$

$$a = b = 7\sqrt{5}$$

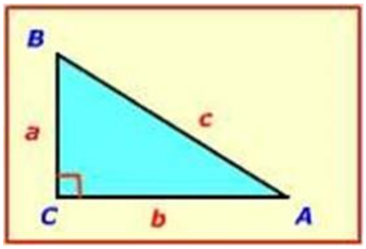


Teorema relacionado con los triángulos 30°-60°-90°.

En un triángulos 30°-60°-90° la medida de la hipotenusa es dos veces mayor que la medida del cateto de menor longitud, y la longitud del cateto mayor es $\sqrt{3}$ más grande que la longitud del cateto menor.

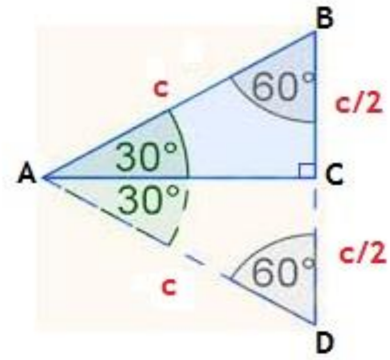
Suponga que a < b, entonces;

$$c = 2a$$
$$b = a \cdot \sqrt{3}$$



Demostración:

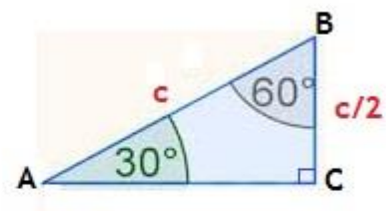
Si tomamos el triángulo equilátero ABD cuyos lados iguales designamos con la letra **c**:



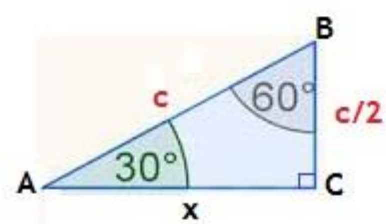
Al trazar el segmento AC perpendicular al lado BD, el triángulo equilátero ABD queda dividido en 2 triángulos especiales congruentes del tipo 30°-60°-90°.

El segmento AC divide a la mitad el lado BD, de esta forma se ve con claridad que el cateto corto BC es la mitad de la hipotenusa:

- Hipotenusa = AB = c
- Cateto corto = BC = $\frac{c}{2}$



Si aplicamos el teorema de Pitágoras sobre el triángulo ABC y llamamos con la letra **x** al cateto largo de este triángulo:



$$\left(\overline{AB}\right)^2 = \left(\overline{BC}\right)^2 + \left(\overline{CA}\right)^2 \Rightarrow (c)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (x)^2 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{4}c^2 + x^2$$

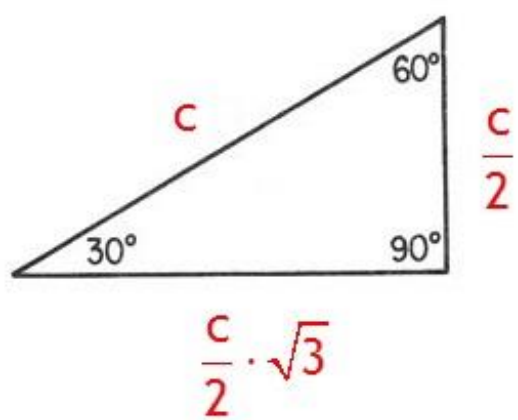
$$c^2 - \frac{1}{4}c^2 = x^2 \Rightarrow \frac{3}{4}c^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{4}\cdot c^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\cdot\sqrt{c^2}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c$$

De esto se deduce que el cateto largo es la multiplicación del cateto corto por $\sqrt{3}$:

- Hipotenusa = AB = c
- Cateto corto = BC = $\frac{c}{2}$
- Cateto largo = CA = $\frac{c}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c$

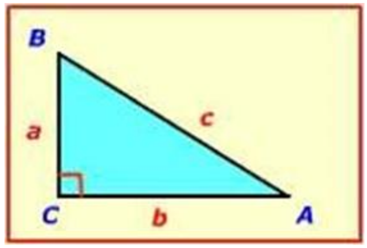
En resumen, si llamamos **c** a la hipotenusa, entonces el teorema se puede representar de la siguiente manera:



Ejemplo 1:

Si la hipotenusa mide 100, el cateto corto medirá______.

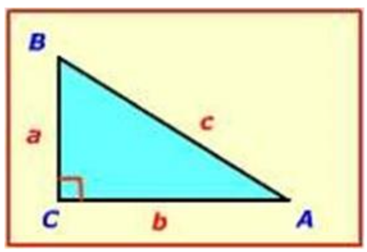
$$c = 2a \Rightarrow 100 = 2a \Rightarrow \frac{100}{2} = a \Rightarrow a = 50$$



Ejemplo 2:

Si la hipotenusa mide 48, el cateto corto medirá ______.

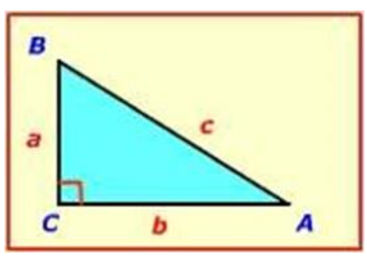
$$c = 2a \Rightarrow 48 = 2a \Rightarrow \frac{48}{2} = a \Rightarrow a = 24$$



Ejemplo 3:

Si el cateto corto mide 21, la hipotenusa medirá ____.

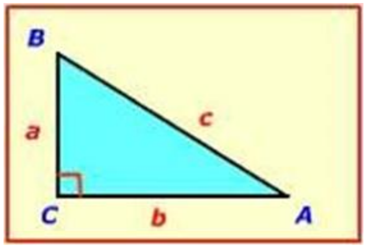
$$c = 2a \Rightarrow c = 2(21) \Rightarrow c = 42$$



Ejemplo 4:

Si el cateto corto mide 36, la hipotenusa medirá ____.

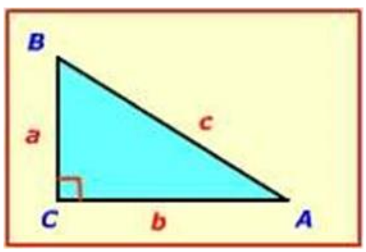
$$c = 2a \Rightarrow c = 2(36) \Rightarrow c = 72$$



Ejemplo 5:

Si el cateto corto mide 36, el cateto largo medirá ____.

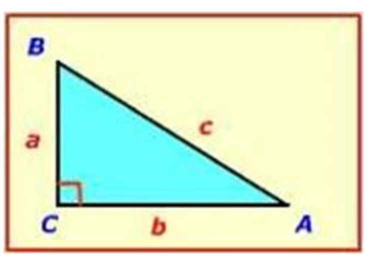
$$b = a \cdot \sqrt{3} \Rightarrow b = 36 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow b = 36\sqrt{3}$$



Ejemplo 6:

Si el cateto corto mide 8, el cateto largo medirá ____.

$$b = a \cdot \sqrt{3} \Rightarrow b = 8 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow b = 8\sqrt{3}$$



Ejemplo 7:

Si el cateto largo mide $10\sqrt{3}$, el cateto corto medirá ____.

$$b = a \cdot \sqrt{3} \Rightarrow 10\sqrt{3} = a \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \frac{10\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{a \cdot \cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}}$$

$$a = 10$$